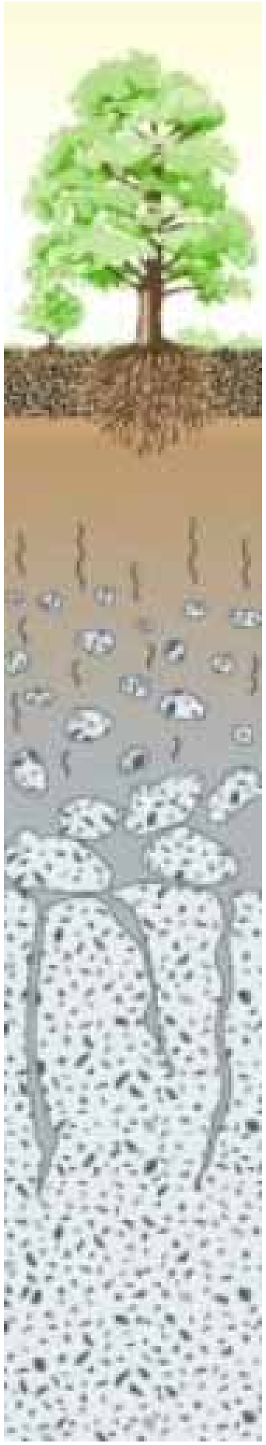
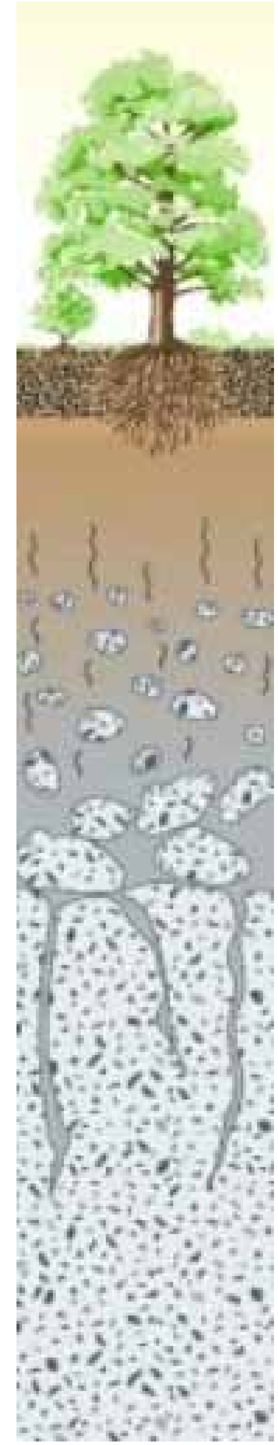


Hydropedologie

Přednáška 9

Hydrodynamika půdní vody nasycené, nenasycené proudění

rovnice kontinuity, Darcy-Buckinghamův zákon, Richardsova rovnice – formy zápisu, řešení - numerické modelování



Nasycené a nenasycené proudění

voda vyplňuje při proudění všechny póry a půda je vodou nasycená, nazývá se proudění nasycené.

půda je jen zčásti nasycená vodou, vlhkost je menší než pórovitost, označujeme proudění vody jako nenasycené

v obou případech je hnací silou spád potenciálu

pro matematický popis se používají zákonitosti potenciálního proudění dle mechaniky tekutin s upřesněním některých parametrů

přechody mezi nasyceným a nenasyceným prostředím jsou kontinuální, nasycené proudění je pouze limitním případem nenasyceného proudění (pouze je zde jednodušší popis když je vlhkost konstantní)

téměř všechny přírodní procesy proudění jsou nestacionární- transientní, proudění – tok je proměnlivý v čase

Nasycené a nenasycené proudění

stacionární proudění – tedy neproměnlivé v čase se uvažuje pouze jako zjednodušení, které se dá snadněji řešit analyticky

v současnosti při použití matematických numerických metod není tento faktor významný

pro popis proudění musíme sestavit soustavu rovnic

- rovnice kontinuity
- Darcyho (Darcy-Buckinghamův) zákon

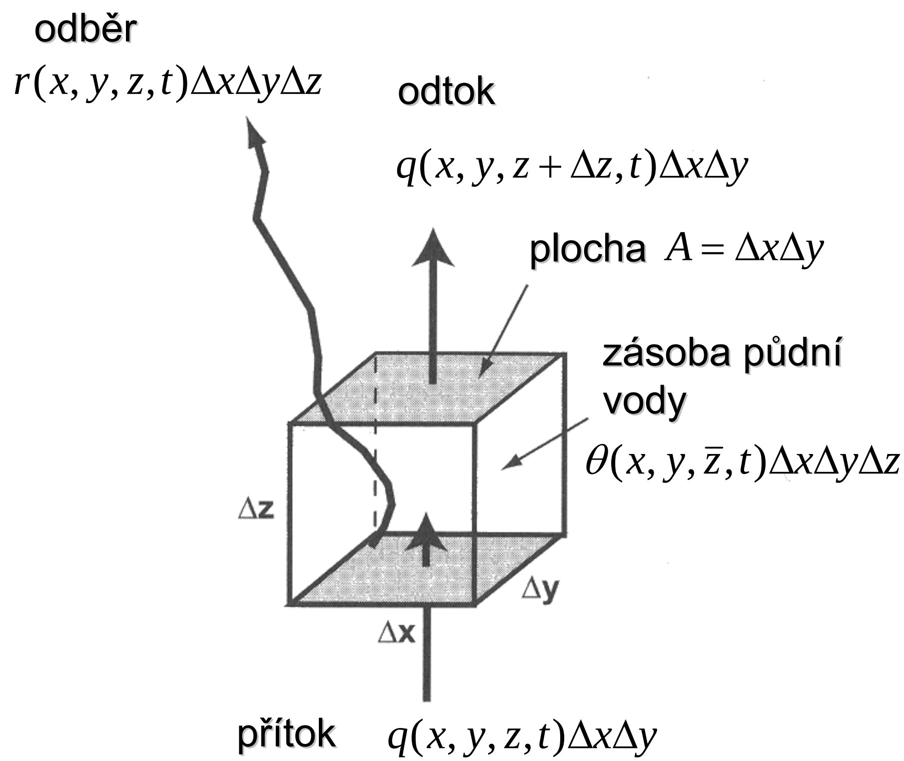
- jejich sloučením vzniká tzv. Richardsova rovnice proudění

Rovnice kontinuity

máme elementární krychli o objemu $V = \Delta x \Delta y \Delta z$

v nejobecnějším případě může voda proudit do elementárního objemu krychle jinou rychlostí (průtokem) než z krychle ven – tím se mění objem vody v krychli

nadto může docházet k odběru (přírůstku) vody mimo stěny krychle – odběrem přímo “z centra” – propad (nebo zdroj) *r* – např. kořeny rostlin



upraveno z Jury & Horton, 2004

Rovnice kontinuity

rovnice je pak získána výpočtem bilance množství vody během malého intervalu Δt, mezi časy t a $t+\Delta t$

rovnice slovně: I=O+T+R

(I) objem vody vstupující do krychle během Δt

= (O) objemu vody vystupujícímu z krychle během Δt

+ (T) přírůstek vody akumulované v krychli během Δt

+ (R) objem vody odebrané přímo z vnitřku krychle během Δt

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + r = 0$$

změna toku "mezi stranami elementu" + změna vlhkosti v čase + odebrané množství vody z elementu (propad - *r*)= 0 (jednorozměrný tvar)

obecný trojrozměrný tvar je pak

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + r = 0$$

kde q_x, q_y, q_z jsou složky vektoru proudění vody (průtoku)

Darcy – Buckinghamův zákon

D.B. zákon je modifikací Darcyho zákona ($q=-K_s$ *grad* H)

předpoklady:

1. sílou umožňující proudění v nenasyceném půdním prostředí je součet kapilárního a gravitačního potenciálu

2. hydraulická vodivost nenasyceného půdního prostředí je funkcí vlhkosti půdy nebo vlhkostního potenciálu

použijeme-li funkční závislost nenasycené hydraulické vodivosti na sací tlakové výšce h, pro vertikální proudění lze napsat

$$q = -K(h)\frac{\partial H}{\partial z} = -K(h)\frac{\partial (h+z)}{\partial z} = -K(h)\left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1\right)$$

Richardsova rovnice pro nenasycené proudění

Dosadíme-li rovnici kontinuity do Darcy-Buckinghamova zákona, dostáváme tzv. Richardsovu rovnici, podle níž můžeme vypočítat vlhkost nebo kapilární sací tlak během neustáleného nenasyceného proudění vody (ev. naopak)

pro jednorozměrné vetrikální proudění, při zanedbání propadu ***r***

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1\right)\right]$$

v tomto tvaru rovnici nelze řešit, jelikož obsahuje dvě neznámé proměnné (θ a h),

toto lze vyřešit zavedením funkce $h(\theta)$ – retenční křivka, lze buď eliminovat θ nebo h

Richardsova rovnice - tvary

Jelikož funkce hydraulické vodivosti *K(h)* je funkcí *h* a *h je funkcí* $\theta \rightarrow h(\theta)$, *K* lze napsat přímo jako funkci θ.

$$K\left(h\left(\theta\right)\right) \equiv K\left(\theta\right)$$

parciální derivaci $\frac{\partial h}{\partial z}$ lze přepsat podle Kaplanova pravidla

$$\frac{\partial h\left(\theta\right)}{\partial z} = \frac{dh}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

kde $\frac{\partial h}{\partial z}$ je sklonem kapilárního potenciálu

Richardsova rovnice – tvary

Kombinací funkce K(θ), přepisu podle Kaplanova rozvoje a Darcy-Buckinghamova zákona lze pak napsat

$$q = -K(\theta)\frac{dh}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} - K(\theta) \equiv -D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z} - K(\theta)$$

kde

$$D(\theta) = K(\theta)\frac{dh}{d\theta} \quad [L^2.T^{-1}]$$

se nazývá difuzivita půdní vody – nemá nic společného s difuzí jako chemickým šířením látek, jen má stejný fyzikální rozměr

Richardsova rovnice – difuzní tvar

po této transformaci lze Richardsovu rovnici pro jednorozměrný vertikální pohyb vody přepsat do tzv. difuzního tvaru

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

Tato rovnice je nelineární parciální diferenciální rovnicí a obecné řešení má pouze pomocí numerických metod, omezeně i analyticky

pokud známe funkci hydraulické vodivosti a difuzivity v závislosti na půdní vlhkosti, rovnice vyžaduje dvě okrajové podmínky (pro vertikální proudění), též vyžaduje počáteční rozdělení vlhkosti v čase 0.

Rovnice nezahrnuje vliv hystereze retenční křivky *h(θ)*.

Z důvodu derivování $\frac{dh}{d\theta}$ ji nelze použít pro řešení nasyceného

proudění, kde je $\theta = \theta_s$=konst (tj. derivace dle θ nemá smysl)

Richardsova rovnice – kapacitní tvar

rozvojem $\frac{d\theta}{dt}$ původní Richardsovy rovnice

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dh}\frac{\partial h}{\partial t} \equiv C(h)\frac{\partial h}{\partial t}$$

kde

$$C(h) = \frac{d\theta}{dh}$$

je specifická vodní kapacita - směrnice retenční křivky, Richardsova rovnice v kapacitním tvaru (pro jednorozměrné vertikální proudění) pak je

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(h)\left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1\right)\right]$$

obdobně jako u difuzního tvaru, platí že rovnice je platná pro jednoznačný proces zvlhčování a drenáže (tj. bez hystereze)

je řešitelná i pro nasycené proudění (C=0)

Způsoby řešení proudění v nenasycené zóně - počáteční a okrajové podmínky

Aby byla řídící rovnice proudění řešitelná, musíme jí doplnit počátečnímí a okrajovými podmínkami.

Řešení se většinou provádí pro konkrétní časový úsek (zájmové období) a prostorovou oblast (oblast proudění).

POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

Počáteční podmínka udává rozdělení neznámé funkce (tlakové výšky h) uvnitř oblasti proudění na počátku uvažovaného období.

$$h(\mathbf{x},0) = h_o(\mathbf{x})$$

kde $h_o(x)$ je pole tlakových výšek předepsané v celé oblasti proudění v čase t = 0. Alternativně je možno použít podmínky

$$\theta(\mathbf{x},0) = \theta_o(\mathbf{x})$$

kde $\theta_o(x)$ je předepsané počáteční vlhkostní pole.

Způsoby řešení proudění v nenasycené zóně - počáteční a okrajové podmínky

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Okrajové podmínky definují interakce popisovaného systému s jeho okolím na hranicích oblasti proudění. Nejčastější jsou dva typy okrajových podmínek – tlaková (Dirichletova) a toková (Neumannova)

Tlaková okrajová podmínka - známý tlak (nebo vlhkost) na hranici Γ_D

$$h(\mathbf{x},t) = h_D(\mathbf{x},t) \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D$$

kde h_D jsou předepsané hodnoty tlakových výšek na zvolené části hranice Γ_D

Toková okrajová podmínka - známý přítok nebo odtok (známá rychlost) vody na hranici Γ_N

$$\mathbf{nq} = -\mathbf{n}(\mathbf{K}(\mathrm{grad}\,h + \mathrm{grad}\,z)) = q_N(\mathbf{x},t) \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N$$

n je jednotková vnější normála hranice a q_N jsou předepsané hodnoty průmětu vektoru objemového toku do normály. Jedná se tedy o tok kolmo přes hranici oblasti proudění

upraveno z přednášek Vogel, T – Podpovrchová hydrologie

Způsoby řešení proudění v nenasycené zóně

CELKOVÁ BILANCE OBJEMU VODY

Globální rovnice kontinuity

Řídící rovnice proudění představuje lokální bilanci objemu vody v nekonečně malém objemu pórovitého prostředí. Celková bilance vody uvnitř celé oblasti proudění nebo uvnitř vybraných podoblastí (např. půdních vrstev) je často cílem řešení.

Tuto bilanci získáme integrací lokální rovnice kontinuity nad těmito oblastmi. Výsledkem integrace je globální (integrální) rovnice kontinuity dané oblasti pro změnu vlhkosti, přítok-odtok a propady-zdroje.

Bilance za časové období

Integrací globální rovnice kontinuity v čase dostaneme pro danou oblast bilanci vody za zvolené časové období (časový interval [0,*t*]):

rozdíl objemu vody v časech t>0 a t=0 se rovná výslednému odtoku přes hranice oblasti a celkové bilanci propadů se zdroji

upraveno z přednášek Vogel, T – Podpovrchová hydrologie

Způsoby řešení proudění v nenasycené zóně - numerické modely

Původně byla Richardsova rovnice řešená analyticky, oblíbeným byl difuzní tvar, který umožňoval analogie s matematickým řešením difuzního pohybu (Crank, 1957)

Řešení však byla omezena na jednoduché případy elementárních procesů v homogenním a isotropním prostředí z důvodu silné nelinearity Richardsovy rovnice

V současnosti se využívá matematického modelování

Řešení na počítačích jsou iterativní, v maticových operacích se používají vyspělé matematické procedury, tzv. solvery.

Výpočty jsou často náročné na strojový výkon, z důvodu charakteru rovnic popisujících vlhkost je nezbytné volit malý prostorový krok, tj. jemnou diskretizaci – velký počet konečných prvků

Často se pro úlohy využívá superpočítačů a paralelního řešení matic

Způsoby řešení proudění v nenasycené zóně - metoda konečných prvků

Oblast řešení rovnice se diskretizuje (prostorově a časově dělí) na konečně velké oblasti (konečné prvky – vhodnější pro nelineární Richardsovu rovnici nebo konečné diference – často pro řešení Laplaceovy rovnice).

Metoda konečných elementů (Finite Element Method - FEM) má mnoho společného s metodou konečných diferencí (Finite Difference Method – FED)

V případě řešení jednorozměrných problémů obě metody téměř splývají.

Vedle bohatšího teoretického zázemí je výhodou FEM snadnost, s jakou se vypořádává s geometrickou nepravidelností hranic vícerozměrných oblastí proudění a s formulací/lokalizací okrajových podmínek, zdrojů a propadů.

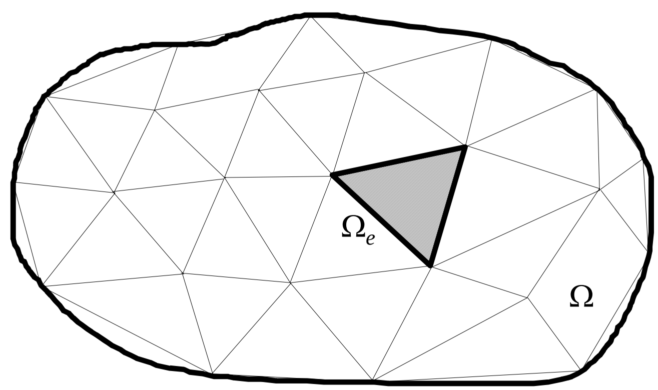
upraveno z přednášek Vogel, T – Podpovrchová hydrologie

Způsoby řešení proudění v nenasycené zóně - metoda konečných prvků

Oblast řešení Ω se rozdělí na malé podoblasti – elementy Ωe, jejichž hrany se protínají v uzlech. Soubor elementů tvoří síť konečných elementů.

Řídící rovnice, vyžadující splnění Richardsovy rovnice v každém z nekonečně mnoha bodů oblasti proudění, se nahradí bilancí přes konečný počet bilančních podoblastí.

Neznámá funkce tlakové výšky h(**x**,t) (kde **x** = (x,z)) se nahradí přibližným řešením, zkonstruovaným jako tzv. lineární kombinace bázových funkcí

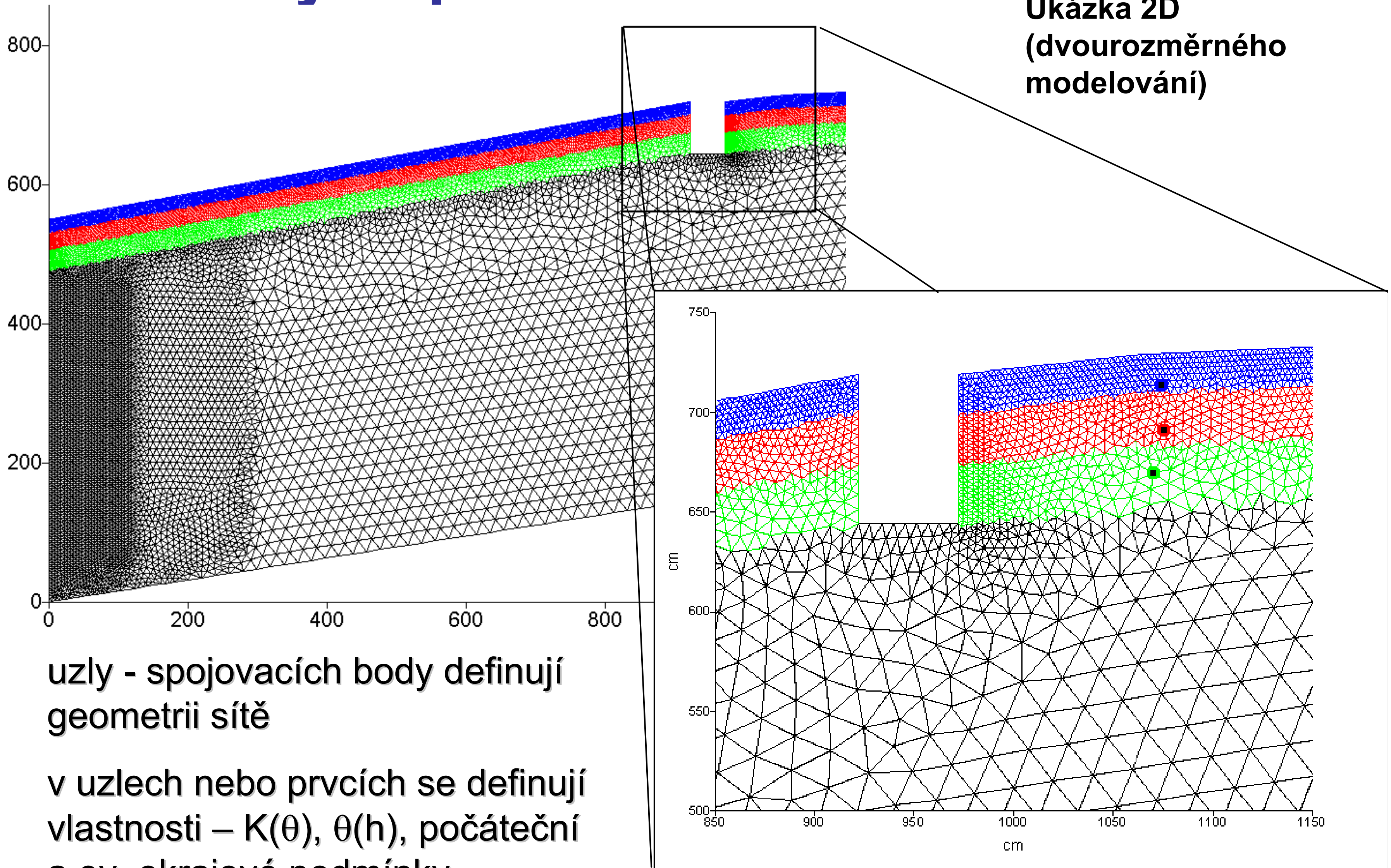


pro zájemce více v předmětu Podpovrchová hydrologie – Prof. Vogel

upraveno z přednášek Vogel, T – Podpovrchová hydrologie

Modelování v nenasycené zóně – sítě konečných prvků

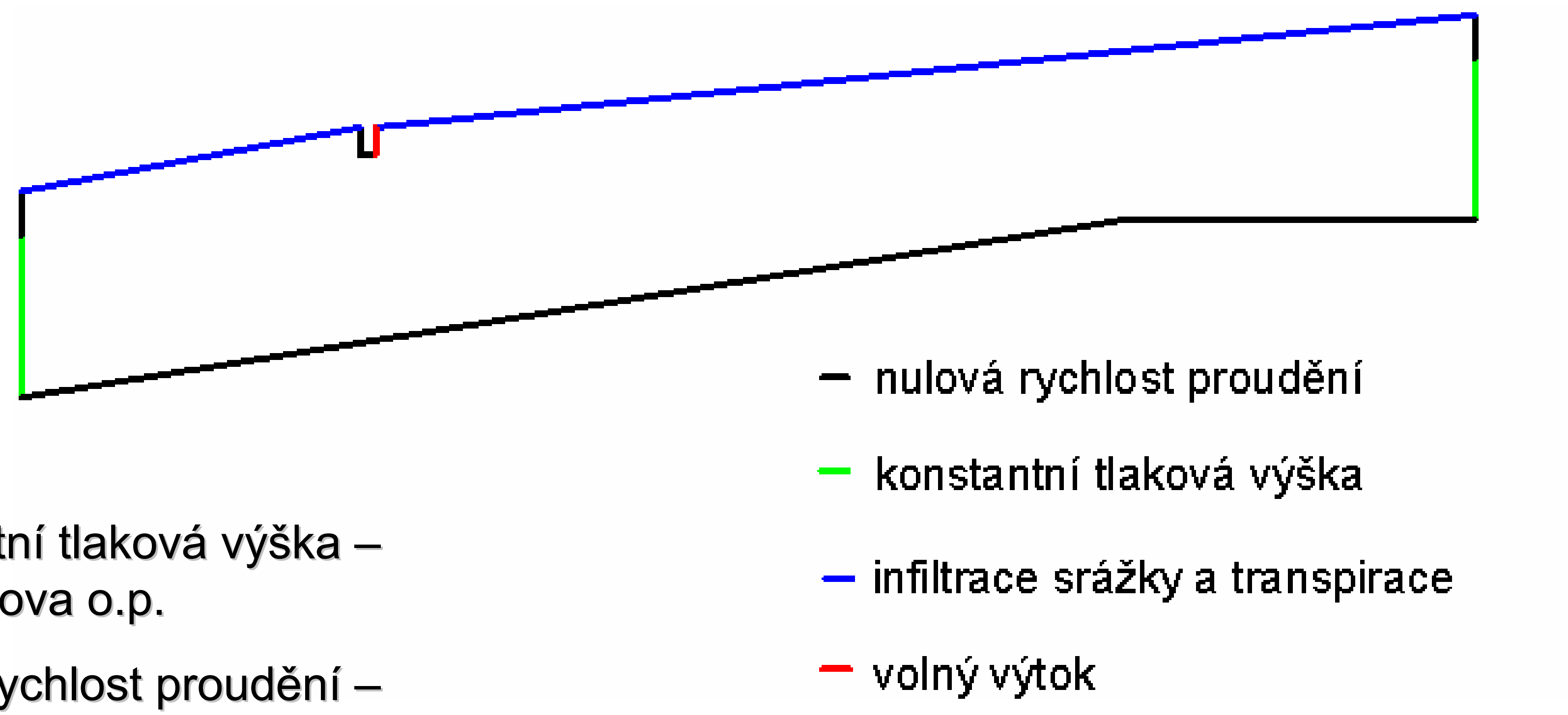
Ukázka 2D (dvourozměrného modelování)



uzly - spojovacích body definují geometrii sítě

v uzlech nebo prvcích se definují vlastnosti – $K(\theta)$, $\theta(h)$, počáteční a ev. okrajové podmínky

Modelování v nenasycené zóně – okrajové podmínky

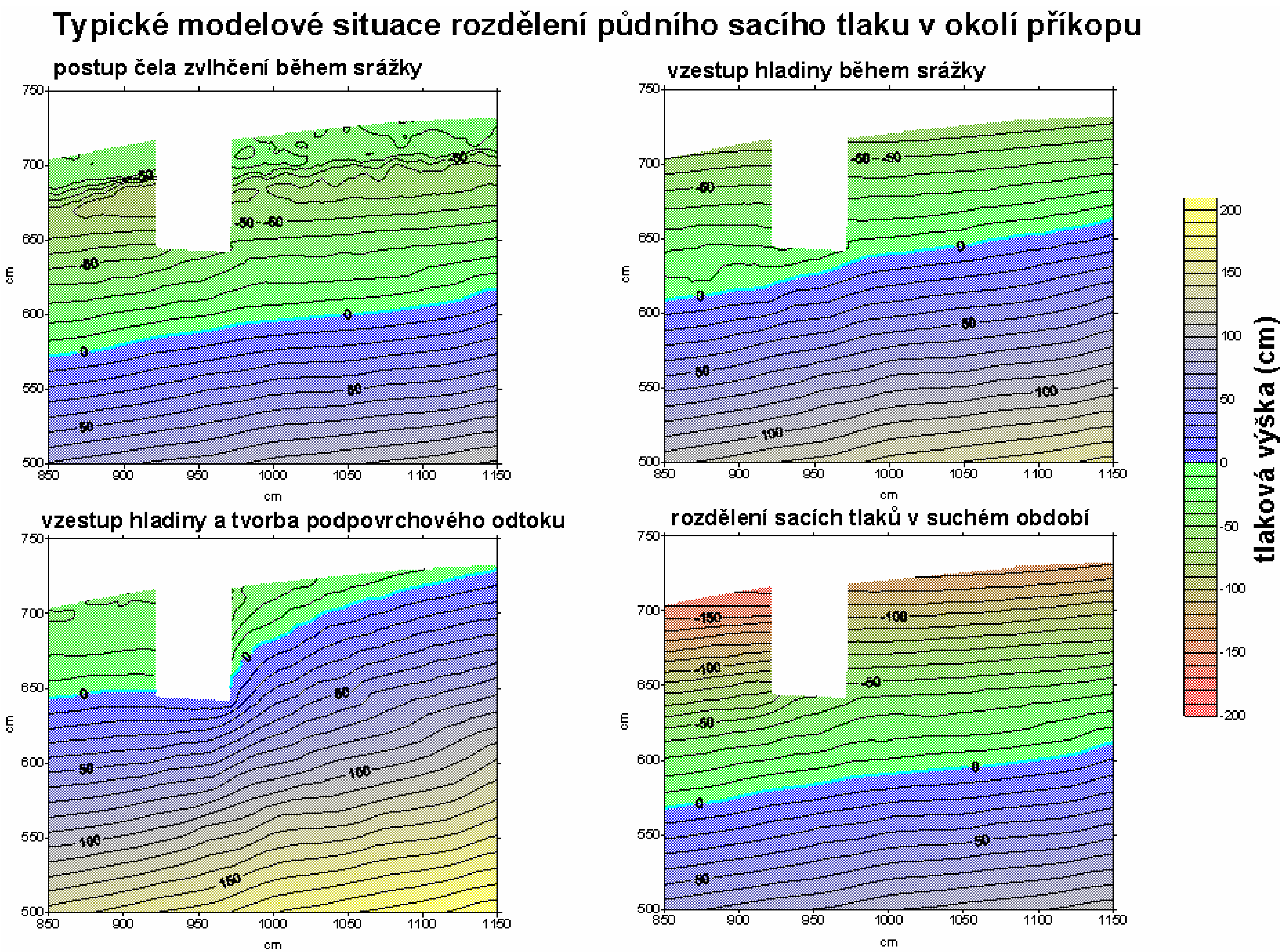


konstantní tlaková výška – Dirichletova o.p.

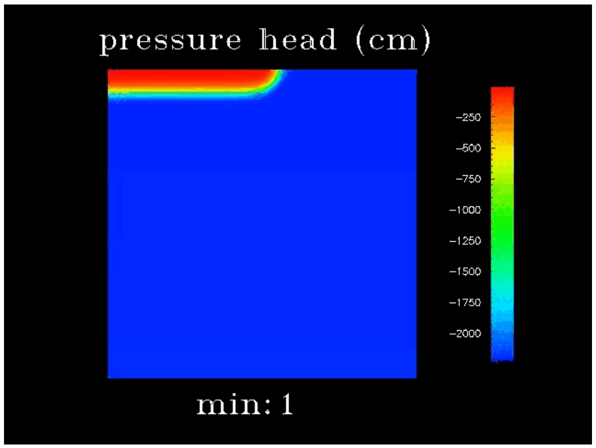
nulová rychlost proudění – Neumannova o.p.

infiltrace, transpirace, volný výtok, volná drenáž -jsou kombinací tlakové a tokové podmínky, které se mezi sebou za určitých kritérií "přepínají"

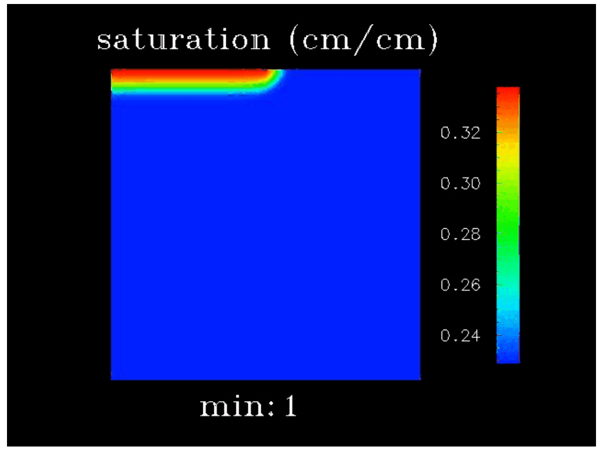
Vizualizace výsledků num. modelu S_2D



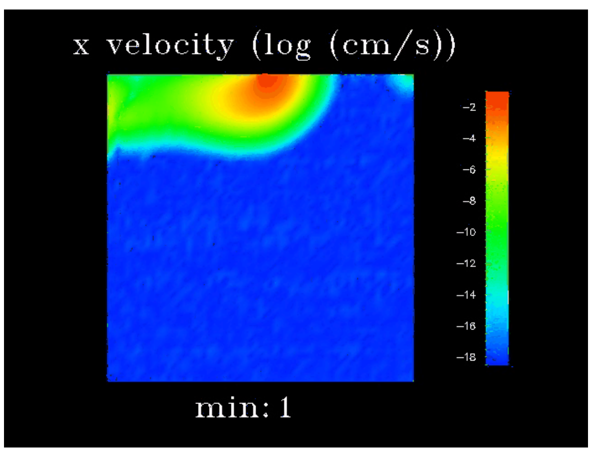
Modelování infiltrace do nenasyceného půdního prostředí



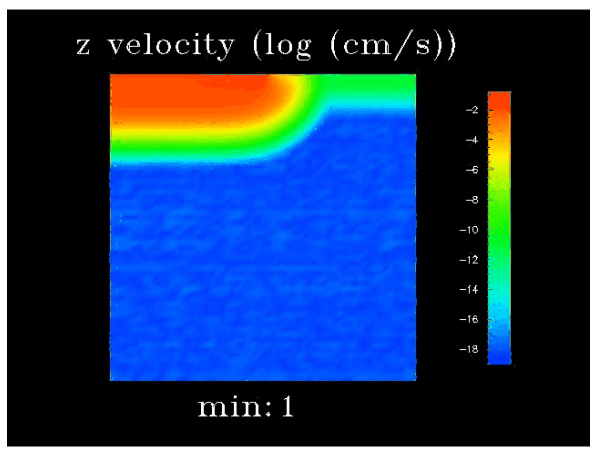
pole tlakových výšek



pole půdní vlhkosti



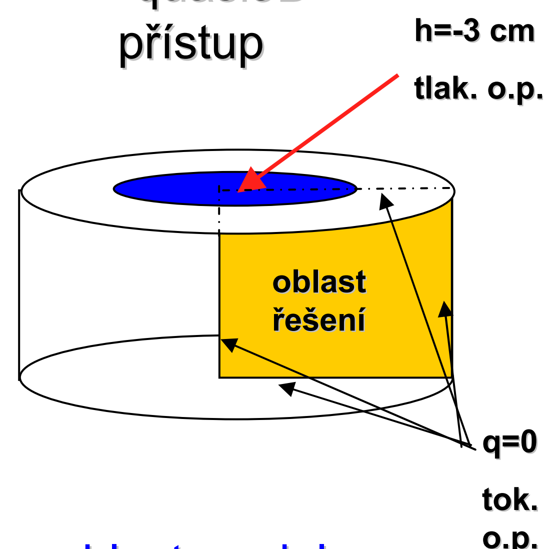
pole horizontální rychlosti proudění



pole vertikální rychlosti proudění

2D infiltrace do homogenního půdního profilu

axysimetrický "quasi3D" přístup



oblast modelu

20x20 cm

3600 elementů

Rovnice proudění – nenasycená a nasycená zóna

v nenasycené (resp. proměnlivě nasycené – vadózní zóně) je nejčastěji uvažovaným pohybem v klasických úlohách jednorozměrný vertikální pohyb (na základě zkušenosti s infiltrací vody do půdního profilu).

Obecně se jedná o pohyb trojrozměrný a rovnici kontinuity, Darcy-Buckinghamův zákon a i rovnici Richardsovu lze rozvinout do trojrozměrného tvaru.

Rovnice pro proudění v nasycené zóně jsou pouze limitním případem rovnice pro proudění v nenasycené zóně (tzv. Laplaceovy rovnice), kde $K(\theta)=K_s$=konst, $\theta(h)=\theta_s$=konst.

Tyto zóny jsou rozděleny spíše historicky a z důvodu zjednodušení popisu, vlivem určitých specifických jevů a předpokladů.

Pro fyzikální popis se však jedná o jednolitý celek a lze ho teoreticky popsat pomocí jedné třírozměrné Richardsovy rovnice (tzv. Fokker-Planckovy rovnice) s uvažováním veškerých možných zdrojů a propadů

Rovnice proudění – nasycená zóna

pro nasycenou zónu lze rovněž odvodit rovnici kontinuity a spolu s Darcyho zákonem získat rovnici proudění, tzv. Laplaceovu rovnici (limitní zjednodušený případ Richardsovy rovnice)

Darcyho zákon

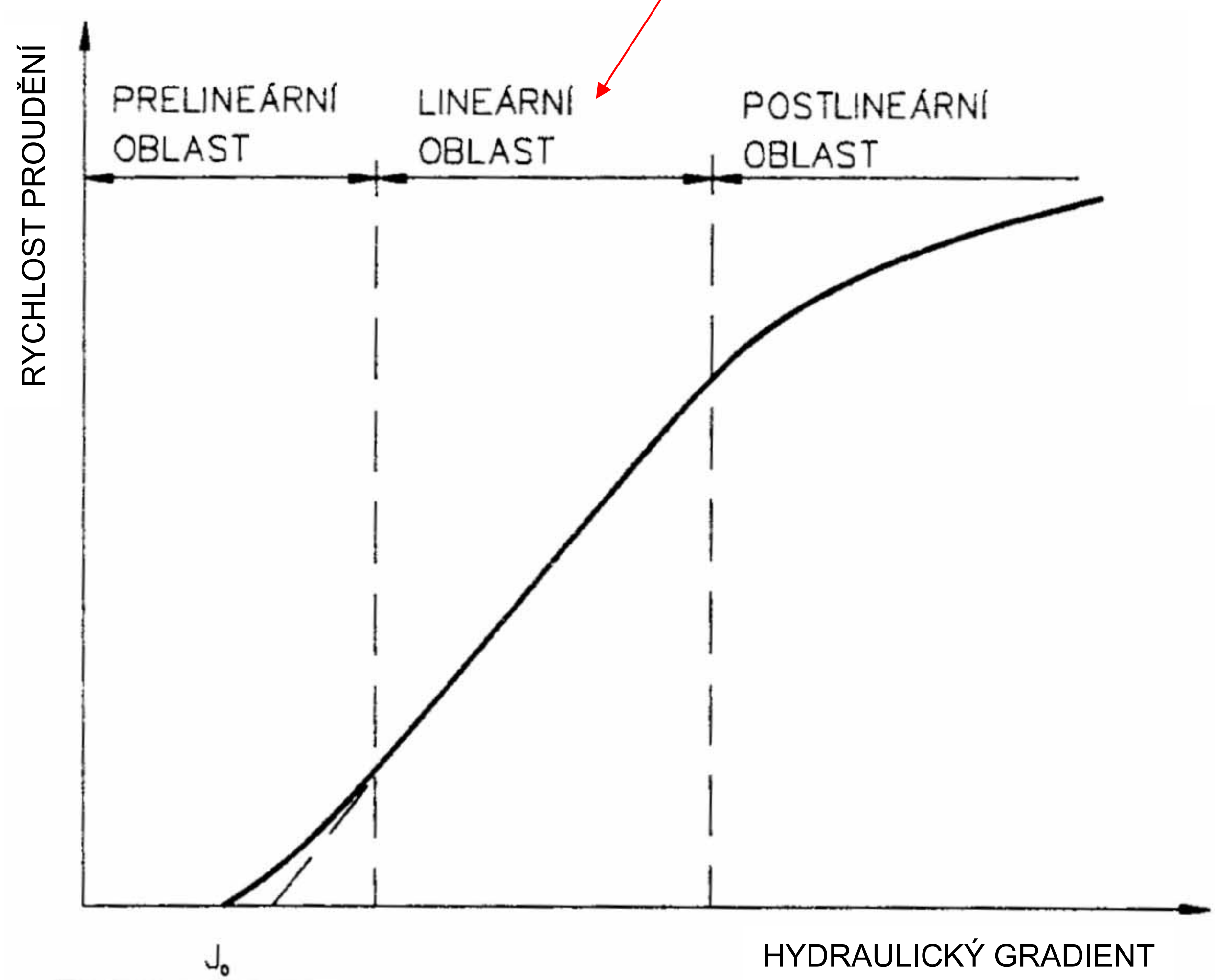
$$q = -K\, grad\, H, tj... q_x = -K \frac{\partial H}{\partial x} \quad q_y = -K \frac{\partial H}{\partial y} \quad q_z = -K \frac{\partial H}{\partial z}$$

rovnice kontinuity (nestlačitelná kapalina, ustálené proudění v čase)

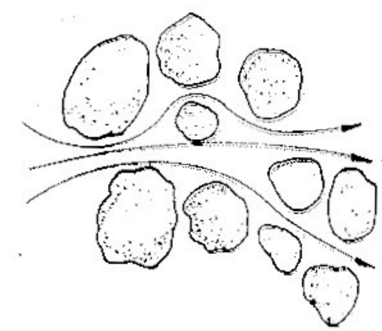
$$\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = 0$$

Meze platnosti Darcyho zákona

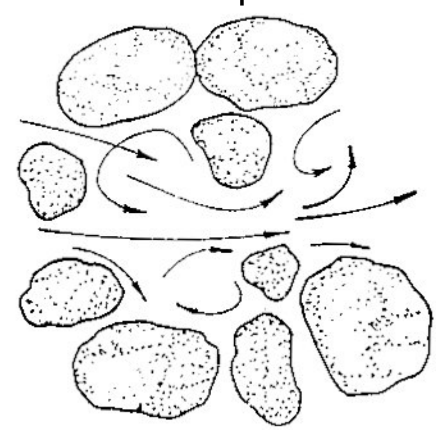
Darcyho zákon platí jen v určitém rozsahu hodnot hydraulického gradientu a rychlosti proudění



Laminární proudění



Turbulentní proudění

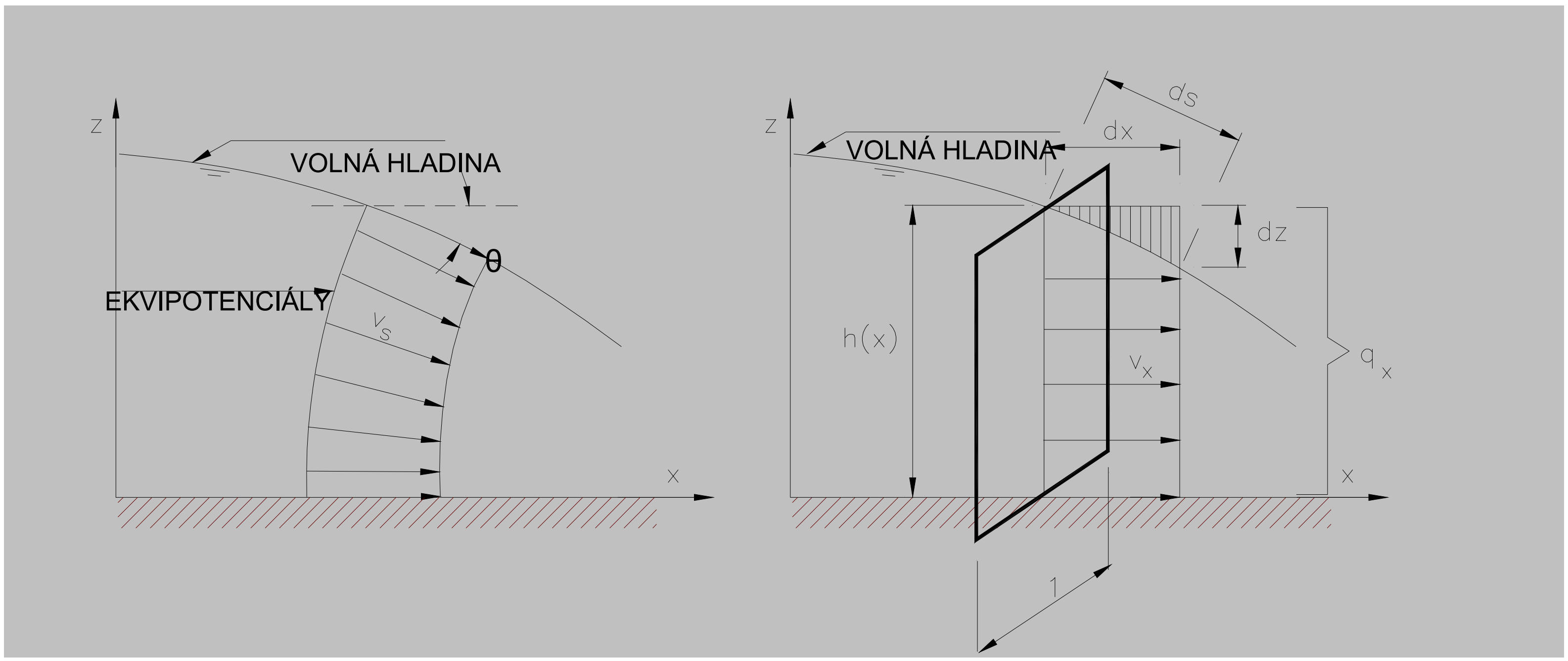


upraveno z přednášek Valentová, J - Hydraulika podzemní vody

Dupuitovy postuláty

•Hydraulická výška H(x,y,z) je rovna výšce hladiny podzemní vody h(x,y), proudnice jsou vodorovné přímky, ekvipotenciály svislice.

•Gradient potenciálu je dán sklonem hladiny a je po svislici konstantní. $\frac{dH}{dx}(x,y,z) = \frac{dh}{dx}(x,y)$



$$v_s = -K \frac{dH}{ds} = -K \frac{dz}{ds} = -K \sin\theta$$

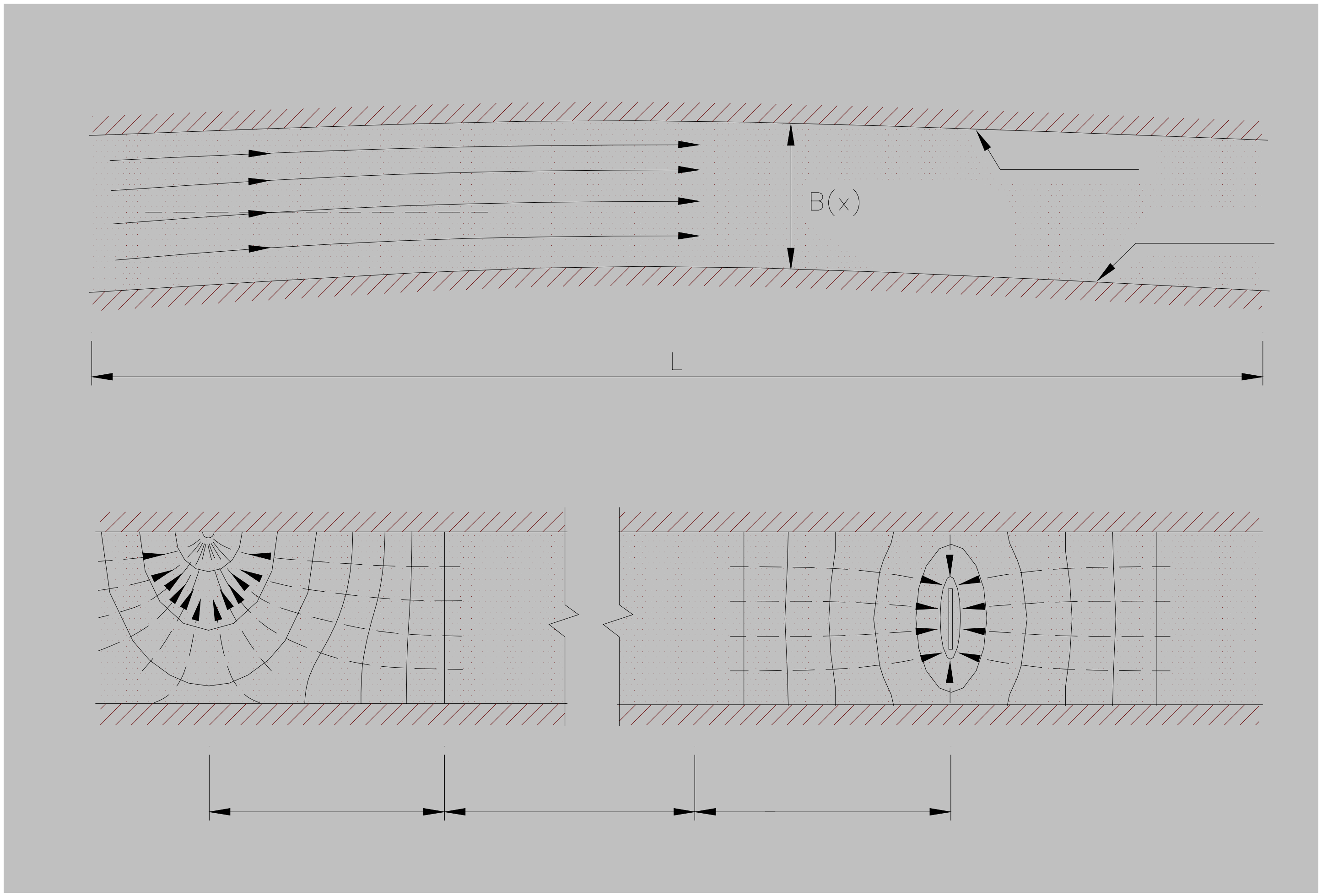
$$v_x = -K \frac{dh}{dx}, \quad h = h(x)$$

při malém úhlu θ lze sin θ = dh/ds nahradit tg θ = dh/dx

upraveno z přednášek Valentová, J - Hydraulika podzemní vody

Dvourozměrné proudění podzemní vody

HYDRAULICKÝ PŘÍSTUP je takový přístup k řešení úloh proudění podzemní vody, kdy zanedbáváme vertikální složky proudění a předpokládáme, že proudění má převážně vodorovný směr.



upraveno z přednášek Valentová, J - Hydraulika podzemní vody

Rovnice proudění – nasycená zóna

získáme spojením rovnice kontinuity, Darcyho zákona a uplatněním Dupuitových postulátů pro dvourozměrné proudění lze psát.

- pro homogenní izotropní prostředí:

  K=konst.

$$K\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)=S_0\frac{\partial H}{\partial t}$$

- pro nehomogenní izotropní prostředí:

  K=fce(x,y,z)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)=S_0\frac{\partial H}{\partial t}$$

- pro nehomogenní neizotropní prostředí:

  $K_{x,y,z}$=fce(x,y,z)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)=S_0\frac{\partial H}{\partial t}$$

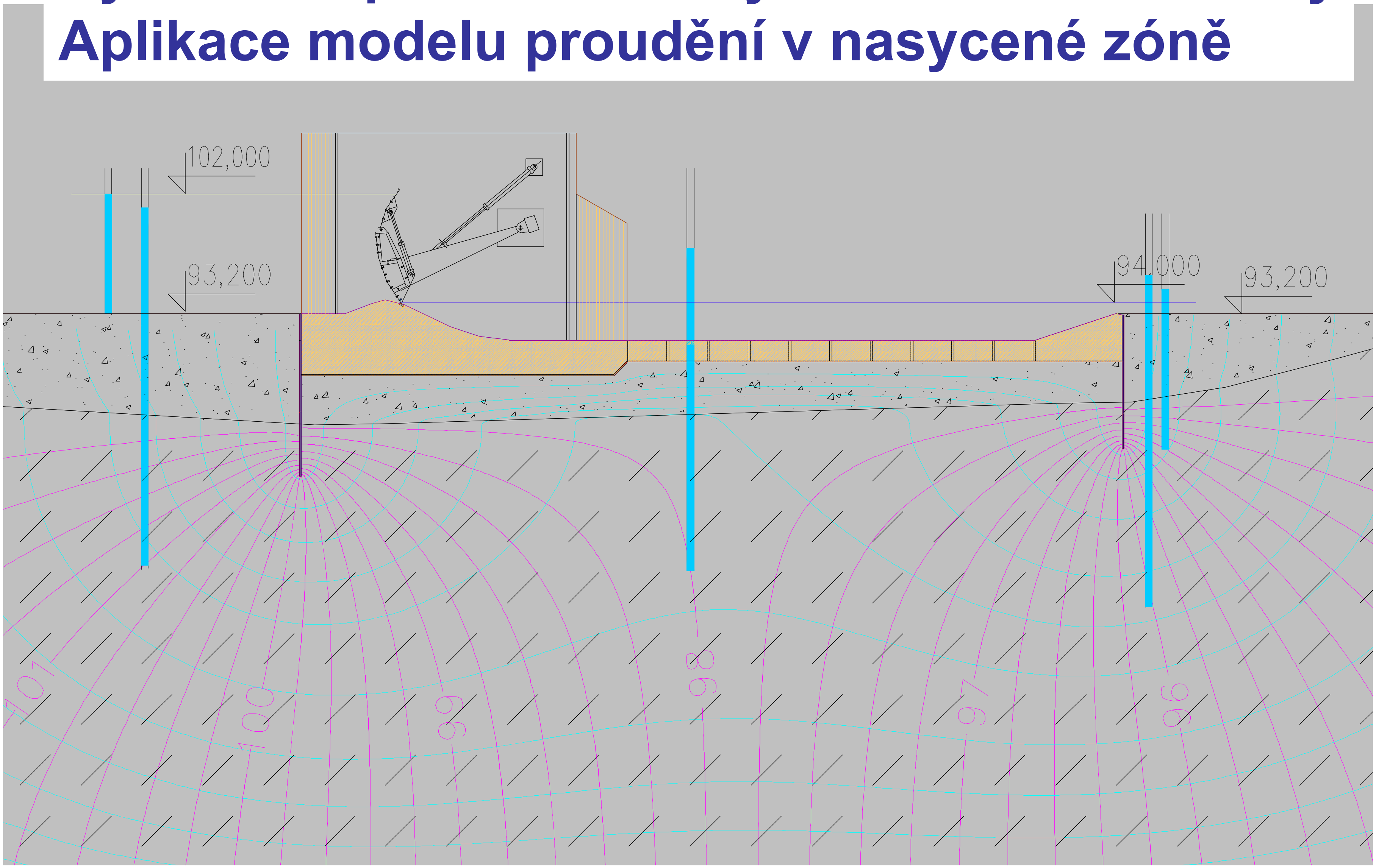
- pro ustálené proudění v homogenním izotropním prostředí:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0$$

kde S je specifická storativita – zásobnost, v rovnici je zdrojem nebo propadem

upraveno z přednášek Valentová, J - Hydraulika podzemní vody

Hydraulika podzemní vody – numerické metody
Aplikace modelu proudění v nasycené zóně



upraveno z přednášek Valentová, J - Hydraulika podzemní vody

Použitá literatura

Kutílek, M., Kuráž, V., Císlerová, M. Hydropedologie, skriptum ČVUT 1994

Jury, W.A. and R. Horton, Soil Physics. Sixth Edition, 2004.

Císlerová, M. Inženýrská hydropedologie, skriptum ČVUT 2001

Císlerová M., Vogel T. Transportní procesy, skriptum ČVUT

Valentová, J. Hydraulika podzemní vody, přednášky, ČVUT

Vogel, T. Podpovrchová hydrologie, přednášky, ČVUT

Přednášky kurzu Hydropedologie vznikly v autorském kolektivu:
Ing. Martin Šanda, PhD a Ing. Michal Sněhota, PhD
Kat. hydromeliorací a krajinného inženýrství, F. stavební ČVUT